ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ №7 (Вариант 24)

**Тема:** Метод Крылова

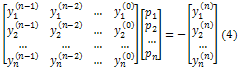
**Задание:** Найти собственные значения и векторы матрицы методом Крылова

**Теория:**

Рассмотрим метод предназначен для нахождения собственных значений матрицы. Пусть  характеристический многочлен матрицы А. Исходя из того, что всякая матрица превращает в нуль свой характеристический многочлен, будем иметь 

Возьмем теперь произвольный ненулевой вектор , размерность которого совпадает с размерностью матрицы А и умножим обе части равенства (1) с правой стороны на данный вектор, получим:.

Положив Метод Крилова равенство (2) можно переписать в следующем виде:Метод Крилова, или



где координаты векторов Метод Крилова определяются по следующей формуле Метод Крилова. То есть, мы получаем систему линейных уравнений Метод Крилова, решив которую, получаем коэффициенты многочлена.

Если система (5) имеет единственное решение, то ее корни Метод Крилова являются коэффициентами характеристического многочлена. Данное решение можно найти любым методом предназначенным для нахождения решения систем линейных уравнений (метод Гаусса, метод простой итерации, метод Зейделя и другие). Если же система (5) не имеет единственного решения, то в таком случае рекомендуется выбрать другой исходный вектор Метод Крилова и заново выполнить указанные действия.

**Решение:**

**Задана матрица:**

**Выберем начальный вектор:**

**Составляем матричное уравнение:**

**Характеристическое уравнение:**

Отделим корни аналитическим методом.

Находим критические точки.

Первая производная:

f'(x) = 3x2 - 8x - 53  
Находим нули функции. Для этого приравниваем производную к нулю:

3x2 - 8x - 53

Находим дискриминант квадратного уравнения:  
D = (-8)2 - 4\*3(-53)=700  
https://chart.googleapis.com/chart?cht=tx&chl=x_%7b1%7d%20=%20\frac%7b-(-8)%2B10\sqrt%7b7%7d%7d%7b2\cdot%203%7d%20=%7b4%20\over%203%7d%20%2B%7b5%20\over%203%7d\sqrt%7b7%7d  
https://chart.googleapis.com/chart?cht=tx&chl=x_%7b2%7d%20=%20\frac%7b-(-8)-10\sqrt%7b7%7d%7d%7b2\cdot%203%7d%20=%7b4%20\over%203%7d%20-%7b5%20\over%203%7d\sqrt%7b7%7d

Составим таблицу знаков вида:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| х | -∞ | -3.076 | 5.742 | +∞ |
| Sing f(x) | - | + | - | + |

В результате анализа таблицы получаем три отрезка на которых функция изменяет знак (-∞,-3.076], [-3.076, 5.742], [5.742,+∞).

Составим таблицу знаков вида:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| х | -7 | -3.076 | 5.742 | 9 |
| Sing f(x) | - | + | - | + |

В результате анализа таблицы получаем три отрезка на которых функция изменяет знак (-7,-3.076], [-3.076, 5.742], [5.742,9).

Найдем корень уравнения на промежутке [-7;-3.076] методом дихотомии.

Поскольку F(-7)\*F(-3.076)<0 (т.е. значения функции на его концах имеют противоположные знаки), то корень лежит в пределах [-7;-3.076].  
**Итерация 1**.  
Находим середину отрезка: c = (-7 -3.076)/2 = -5.038  
F(x) = 135.617  
F(c) = -70  
Поскольку F(c)•F(a) < 0, то b=-5.038  
**Итерация 2**.  
Находим середину отрезка: c = (-7 -5.038)/2 = -6.019  
F(x) = 54.035  
F(c) = 135.617  
Поскольку F(c)•F(a) < 0, то b=-6.019  
**Итерация 3**.  
Находим середину отрезка: c = (-7 -6.019)/2 = -6.51  
F(x) = -2.322  
F(c) = 54.035  
Поскольку F(c)•F(b) < 0, то a=-6.51  
**Итерация 4**.  
Находим середину отрезка: c = (-6.51 -6.019)/2 = -6.264  
F(x) = 27.228  
F(c) = -2.322  
Поскольку F(c)•F(a) < 0, то b=-6.264  
Остальные расчеты сведем в таблицу.

Остальные расчеты сведем в таблицу.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| N | c | a | b | f(c) | f(x) | ε |
| 1 | -5.038 | -5.038 | -3.076 | -70 | 135.6165 | 1.962 |
| 2 | -6.019 | -6.019 | -5.038 | 135.6165 | 54.0351 | 0.981 |
| 3 | -6.5095 | -6.5095 | -6.019 | 54.0351 | -2.3217 | 0.4905 |
| 4 | -6.2643 | -6.2643 | -6.019 | -2.3217 | 27.2276 | 0.2453 |
| 5 | -6.3869 | -6.3869 | -6.2643 | 27.2276 | 12.8012 | 0.1226 |
| 6 | -6.4482 | -6.4482 | -6.3869 | 12.8012 | 5.3275 | 0.06131 |
| 7 | -6.4788 | -6.4788 | -6.4482 | 5.3275 | 1.5249 | 0.03066 |
| 8 | -6.4942 | -6.4942 | -6.4788 | 1.5249 | -0.3929 | 0.01533 |
| 9 | -6.4865 | -6.4865 | -6.4788 | -0.3929 | 0.5674 | 0.00766 |
| 10 | -6.4903 | -6.4903 | -6.4865 | 0.5674 | 0.08757 | 0.00383 |
| 11 | -6.4923 | -6.4923 | -6.4903 | 0.08757 | -0.1526 | 0.00192 |

Таким образом, в качестве корня можно принять:  
x=(-6.4923-6.4903)/2 = -6.4913  
**Ответ**:x = -6.4913

Найдем корень уравнения на промежутке [-3.076;5.742] методом дихотомии.

Поскольку F(-3.076)\*F(5.742)<0 (т.е. значения функции на его концах имеют противоположные знаки), то корень лежит в пределах [-3.076;5.742].  
**Итерация 1**.  
Находим середину отрезка: c = (-3.076 + 5.742)/2 = 1.333  
F(x) = 22.612  
F(c) = 194.076  
Поскольку F(c)•F(b) < 0, то a=1.333  
**Итерация 2**.  
Находим середину отрезка: c = (1.333 + 5.742)/2 = 3.538  
F(x) = -95.275  
F(c) = 22.612  
Поскольку F(c)•F(a) < 0, то b=3.538  
**Итерация 3**.  
Находим середину отрезка: c = (1.333 + 3.538)/2 = 2.435  
F(x) = -40.348  
F(c) = -95.275  
Поскольку F(c)•F(a) < 0, то b=2.435  
**Итерация 4**.  
Находим середину отрезка: c = (1.333 + 2.435)/2 = 1.884  
F(x) = -9.37  
F(c) = -40.348  
Поскольку F(c)•F(a) < 0, то b=1.884  
Остальные расчеты сведем в таблицу.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| N | c | a | b | f(c) | f(x) | ε |
| 1 | 1.333 | 1.333 | 5.742 | 194.0765 | 22.612 | 4.409 |
| 2 | 3.5375 | 3.5375 | 5.742 | 22.612 | -95.2752 | 2.2045 |
| 3 | 2.4353 | 2.4353 | 3.5375 | -95.2752 | -40.3479 | 1.1023 |
| 4 | 1.8841 | 1.8841 | 2.4353 | -40.3479 | -9.3698 | 0.5511 |
| 5 | 1.6086 | 1.6086 | 1.8841 | -9.3698 | 6.5584 | 0.2756 |
| 6 | 1.7463 | 1.7463 | 1.8841 | 6.5584 | -1.4292 | 0.1378 |
| 7 | 1.6775 | 1.6775 | 1.7463 | -1.4292 | 2.5597 | 0.06889 |
| 8 | 1.7119 | 1.7119 | 1.7463 | 2.5597 | 0.5639 | 0.03445 |
| 9 | 1.7291 | 1.7291 | 1.7463 | 0.5639 | -0.433 | 0.01722 |
| 10 | 1.7205 | 1.7205 | 1.7291 | -0.433 | 0.06534 | 0.00861 |
| 11 | 1.7248 | 1.7248 | 1.7291 | 0.06534 | -0.1839 | 0.00431 |
| 12 | 1.7227 | 1.7227 | 1.7248 | -0.1839 | -0.05927 | 0.00215 |
| 13 | 1.7216 | 1.7216 | 1.7227 | -0.05927 | 0.00304 | 0.00108 |

Таким образом, в качестве корня можно принять:  
x=(1.7216+1.7227)/2 = 1.7221  
**Ответ**:x = 1.7221

Найдем корень уравнения на промежутке [5.742;9]методом дихотомии.

Поскольку F(5.742)\*F(9)<0 (т.е. значения функции на его концах имеют противоположные знаки), то корень лежит в пределах [5.742;9].  
**Итерация 1**.  
Находим середину отрезка: c = (5.742 + 9)/2 = 7.371  
F(x) = -109.511  
F(c) = -148.891  
Поскольку F(c)•F(b) < 0, то a=7.371  
**Итерация 2**.  
Находим середину отрезка: c = (7.371 + 9)/2 = 8.186  
F(x) = -55.393  
F(c) = -109.511  
Поскольку F(c)•F(b) < 0, то a=8.186  
**Итерация 3**.  
Находим середину отрезка: c = (8.186 + 9)/2 = 8.593  
F(x) = -18.308  
F(c) = -55.393  
Поскольку F(c)•F(b) < 0, то a=8.593  
**Итерация 4**.  
Находим середину отрезка: c = (8.593 + 9)/2 = 8.796  
F(x) = 2.917  
F(c) = -18.308  
Поскольку F(c)•F(a) < 0, то b=8.796  
Остальные расчеты сведем в таблицу.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| N | c | a | b | f(c) | f(x) | ε |
| 1 | 7.371 | 7.371 | 9 | -148.8913 | -109.511 | 1.629 |
| 2 | 8.1855 | 8.1855 | 9 | -109.511 | -55.3929 | 0.8145 |
| 3 | 8.5928 | 8.5928 | 9 | -55.3929 | -18.3084 | 0.4073 |
| 4 | 8.7964 | 8.7964 | 9 | -18.3084 | 2.9175 | 0.2036 |
| 5 | 8.6946 | 8.6946 | 8.7964 | 2.9175 | -7.9244 | 0.1018 |
| 6 | 8.7455 | 8.7455 | 8.7964 | -7.9244 | -2.5611 | 0.05091 |
| 7 | 8.7709 | 8.7709 | 8.7964 | -2.5611 | 0.1637 | 0.02545 |
| 8 | 8.7582 | 8.7582 | 8.7709 | 0.1637 | -1.2023 | 0.01273 |
| 9 | 8.7646 | 8.7646 | 8.7709 | -1.2023 | -0.5202 | 0.00636 |
| 10 | 8.7677 | 8.7677 | 8.7709 | -0.5202 | -0.1785 | 0.00318 |
| 11 | 8.7693 | 8.7693 | 8.7709 | -0.1785 | -0.00742 | 0.00159 |

Таким образом, в качестве корня можно принять:  
x=(8.7693+8.7709)/2 = 8.7701  
**Ответ**:x = 8.7701

**Собственные значения:**

**Найдём коэффициенты:**

**Собственные вектора:**

;

;

**Протокол решения в Scilab:**

disp('Метод Крылова нахождения собственных значений и векторов')

A= [1 2 5;

2 -3 -8;

2 -3 6]

disp(A,'Исходная матрица:')

y0= [1; 0; 0]

y1=A\*y0

y2=A\*y1

y3=A\*y2

z=[y0 y1 y2 y3]

disp(z,' y0 y1 y2 y3','Найденные вектора:')

o=[0; 0; 0]

g=[y2 y1 y0 o -y3]

disp(g,'Матричное уравнение:')

G=[y2 y1 y0]

disp('Находим собственные значения:')

P=-G\y3

disp(P,'P=')

p1=poly([P(3) P(2) P(1) 1],'x','c')

disp(p1)

r=roots(p1)

disp(r)

q=[1;1;1]

disp('Находим собственные вектора:')

for i=1:size(A,'r')

q(1,i+1)=r(1)\*q(1,i)-P(i)

q(2,i+1)=r(2)\*q(2,i)-P(i)

q(3,i+1)=r(3)\*q(3,i)-P(i)

end

disp(q,'q=')

x1=poly([q(1,4) q(1,3) q(1,2) q(1,1)], 'x', 'c')

x2=poly([q(2,4) q(2,3) q(2,2) q(2,1)], 'x', 'c')

x3=poly([q(3,4) q(3,3) q(3,2) q(3,1)], 'x', 'c')

disp(roots(x3),'x3=',roots(x2),'x2=',roots(x1),'x1=');

**Вывод в консоли:**

-->

Метод Крылова нахождения собственных значений и векторов

A= [1 2 5;

2 -3 -8;

2 -3 6]

A =

1. 2. 5.

2. -3. -8.

2. -3. 6.

disp(A,'Исходная матрица:')

Исходная матрица:

1. 2. 5.

2. -3. -8.

2. -3. 6.

y0= [1; -1; 0]

y0 =

1.

-1.

0.

y1=A\*y0

y1 =

-1.

5.

5.

y2=A\*y1

y2 =

34.

-57.

13.

y3=A\*y2

y3 =

-15.

135.

317.

z=[y0 y1 y2 y3]

z =

1. -1. 34. -15.

-1. 5. -57. 135.

0. 5. 13. 317.

disp(z,' y0 y1 y2 y3','Найденные вектора:')

Найденные вектора:

y0 y1 y2 y3

1. -1. 34. -15.

-1. 5. -57. 135.

0. 5. 13. 317.

o=[0; 0; 0]

o =

0.

0.

0.

g=[y2 y1 y0 o -y3]

g =

34. -1. 1. 0. 15.

-57. 5. -1. 0. -135.

13. 5. 0. 0. -317.

disp(g,'Матричное уравнение:')

Матричное уравнение:

34. -1. 1. 0. 15.

-57. 5. -1. 0. -135.

13. 5. 0. 0. -317.

G=[y2 y1 y0]

G =

34. -1. 1.

-57. 5. -1.

13. 5. 0.

disp('Находим собственные значения:')

Находим собственные значения:

P=-G\y3

P =

-4.

-53.

98.

disp(P,'P=')

P=

-4.

-53.

98.

p1=poly([P(3) P(2) P(1) 1],'x','c')

p1 =

2 3

98 -53x -4x +x

disp(p1)

2 3

98 -53x -4x +x

r=roots(p1)

r =

8.7694001

-6.4910387

1.7216386

disp(r)

8.7694001

-6.4910387

1.7216386

q=[1;1;1]

q =

1.

1.

1.

disp('Находим собственные вектора:')

Находим собственные вектора:

for i=1:size(A,'r')

q(1,i+1)=r(1)\*q(1,i)-P(i)

q(2,i+1)=r(2)\*q(2,i)-P(i)

q(3,i+1)=r(3)\*q(3,i)-P(i)

end

q =

1. 12.7694

1. 0.

1. 0.

q =

1. 12.7694

1. -2.4910387

1. 0.

q =

1. 12.7694

1. -2.4910387

1. 5.7216386

q =

1. 12.7694 164.97998

1. -2.4910387 0.

1. 5.7216386 0.

q =

1. 12.7694 164.97998

1. -2.4910387 69.169428

1. 5.7216386 0.

q =

1. 12.7694 164.97998

1. -2.4910387 69.169428

1. 5.7216386 62.850594

q =

1. 12.7694 164.97998 1348.7754

1. -2.4910387 69.169428 0.

1. 5.7216386 62.850594 0.

q =

1. 12.7694 164.97998 1348.7754

1. -2.4910387 69.169428 -546.98143

1. 5.7216386 62.850594 0.

q =

1. 12.7694 164.97998 1348.7754

1. -2.4910387 69.169428 -546.98143

1. 5.7216386 62.850594 10.20601

disp(q,'q=')

q=

1. 12.7694 164.97998 1348.7754

1. -2.4910387 69.169428 -546.98143

1. 5.7216386 62.850594 10.20601

x1=poly([q(1,4) q(1,3) q(1,2) q(1,1)], 'x', 'c')

x1 =

Real part

2 3

1348.7754 +164.97998x +12.7694x +x

Imaginary part

0

x2=poly([q(2,4) q(2,3) q(2,2) q(2,1)], 'x', 'c')

x2 =

Real part

2 3

-546.98143 +69.169428x -2.4910387x +x

Imaginary part

0

x3=poly([q(3,4) q(3,3) q(3,2) q(3,1)], 'x', 'c')

x3 =

Real part

2 3

10.20601 +62.850594x +5.7216386x +x

Imaginary part

0

disp(roots(x3),'x3=',roots(x2),'x2=',roots(x1),'x1=');

x1=

-1.4427048

-1.4427048

-9.8839904

x2=

-1.7735591

-1.7735591

6.0381568

x3=

-2.7784263

-2.7784263

-0.1647861

**Вывод:**

Можно заметить, что при нахождении ответов решения системы есть небольшие разбежности, потому что считая вручную используем ε = 0,001 (допускаемое приближение).

**Список используемой литературы:**

1. Мак-Кракен Д., Дорн У. Численные методы и программирование на ФОРТРАНе. – М.: Мир, 1977. – 584 с.